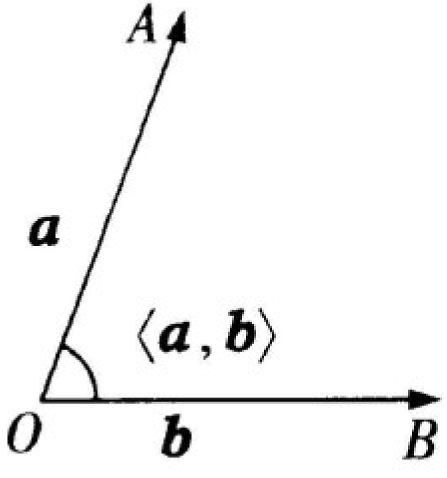
知识点1 ‖ 空间向量的夹角

1. 两个向量夹角的定义

如图 3.1.3－1，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.



2. 两个向量夹角的范围

通常规定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$，两个向量的夹角是唯一确定的，且 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向共线；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线；

当 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$ 时，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

1.对于空间任意两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 是$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$ 的　　**答案** ▶ B

A. 充分不必要条件　　C. 充要条件

B. 必要不充分条件　　D. 既不充分又不必要条件

知识点 2 ‖ 空间向量的数量积

1. 定义

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$叫做 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的数量积(inner product),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

2. 几何意义

类比平面向量,我们可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义:数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度$|\boldsymbol{a}|$与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影$|\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的乘积,或 $\boldsymbol{b}$ 的长度$|\boldsymbol{b}|$与 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 的方向上的投影$|\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$的乘积.

3. 空间向量数量积的性质

(1)若 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量,$\boldsymbol{e}$ 是任意单位向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$.

(2)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2$.

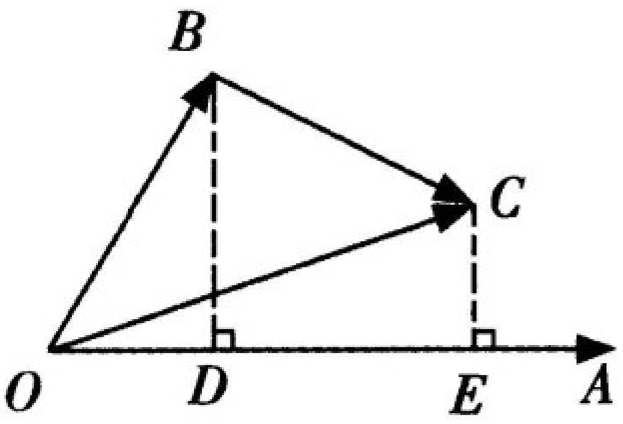
(4)若 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

4. 空间向量数量积的运算律

(1)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

(3)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).



知识点3 || 利用数量积解决立体几何问题

空间向量数量积的性质可以看作其定义的引申和拓展,空间向量数量积与向量的模和夹角有关,可以以它为工具,解决立体几何中与夹角和距离有关的问题.

常有以下应用:

(1)求空间两点间的距离或线段长度转化为求相应向量的模;

(2)求空间两条直线的夹角转化为求两条直线方向向量的夹角,但要注意空间两条直线的夹角与方向向量的夹角的范围限制;

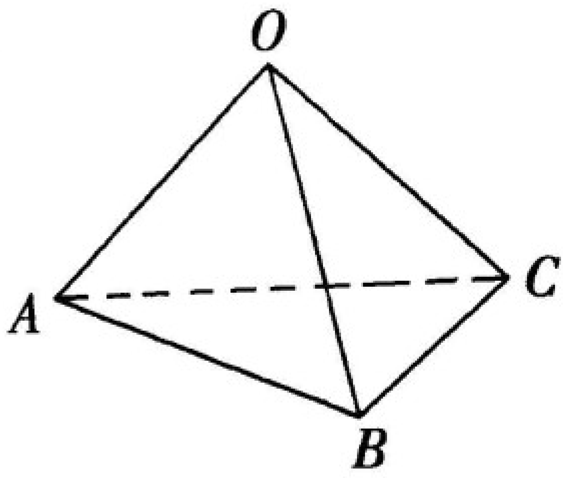
(3)和垂直相关的问题可转化为向量的数量积为零的相关问题.

2. 已知两异面直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,则两直线的夹角为　**答案▶** B

A. 30°　　B. 60°

C. 120°　　D. 150°

3. 已知正四面体 $OABC$ 的棱长为 1



(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$;

(2) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$;

(3) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$.

解析▶ 在正四面体 $OABC$ 中，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$.

$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\rangle=\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle=60°$.

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\angle AOB=1\times1\times\cos 60°=\frac{1}{2}$.

(2) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})$

$=\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$

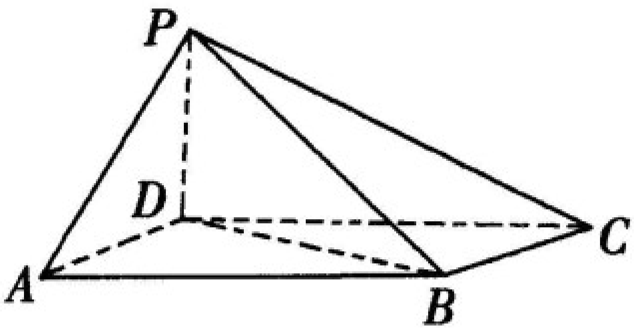
$=1^2+2\times1\times1\times\cos60°-2\times1\times1\times\cos60°+1^2-2\times1\times1\times\cos60°$

$=1+1-1+1-1$

$=1.$

(3) $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2}=\sqrt{1^2+1^2+1^2+(2\times1\times1\times\cos60°)\times3}=\sqrt{6}.$

4. 如图 3.1.3－9，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60°$，$AB=2AD$，$PD\perp$ 底面 $ABCD$. 证明：$PA\perp BD$.



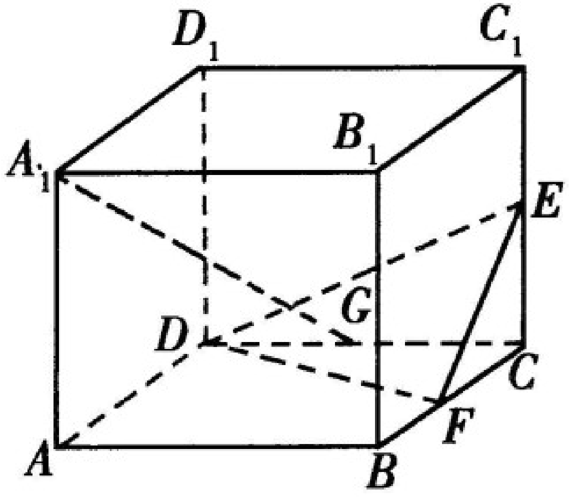
解析▶ 由底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60°$，$AB=2AD$ 知，$DA\perp BD$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$.

由 $PD\perp$底面 $ABCD$ 知，$PD\perp BD$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{PD}=0$.

又$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA}$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，即 $PA\perp BD$.

5. 如图 3.1.3－10，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,G 分别是棱 CC_1，BC，CD 的中点，求证：$A_1G\perp$平面 DEF.



解析▶ 设正方体的棱长为 a，

$\because \overrightarrow{A_1G}\cdot\overrightarrow{DF}$

$=(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG})\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF})$

$=\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{CF}$

$=\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CF}$

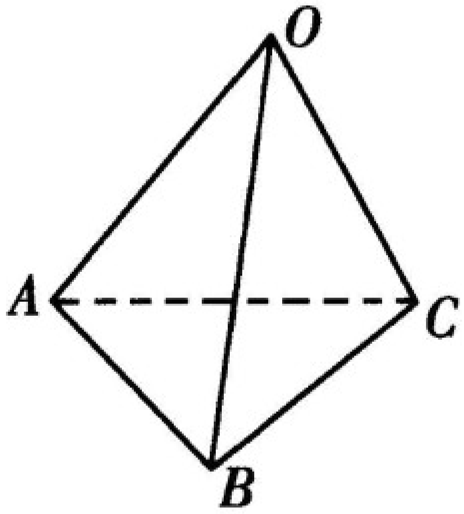
$=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2$

$=0$，

$\therefore A_1G\perp DF$，同理可证 $A_1G\perp DE$，又 $DF\cap DE=D$，

$\therefore A_1G\perp$ 平面 DEF.

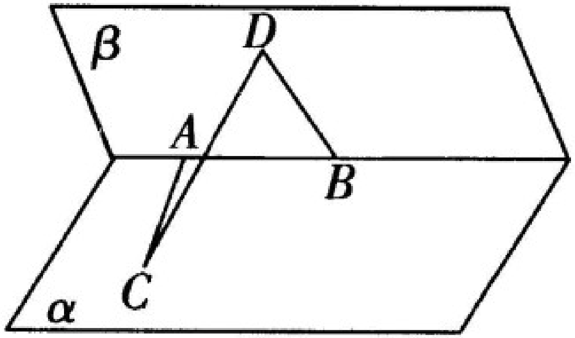
6. 如图 3. 1. 3 – 12，在空间四边形 $OABC$ 中，$OA=8$，$AB=6$，$AC=4$，$BC=5$，$\angle OAC=45^\circ$，$\angle OAB=60^\circ$，求异面直线 OA 与 BC 的夹角的余弦值.



解析 ▶ $\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AC}\rangle-|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}\rangle=8\times4\times\cos135^\circ-8\times6\times\cos120^\circ=24-16\sqrt{2}$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{24-16\sqrt{2}}{8\times5}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{5}$，$\therefore$ 异面直线 OA 与 BC 的夹角的余弦值为$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{5}$.

7. 如图 3. 1. 3 – 19 所示，在平面角为 120° 的二面角 $\alpha-AB-\beta$ 中，$AC\subset\alpha$，$BD\subset\beta$，且 $AC\perp AB$，$BD\perp AB$，垂足分别为 A，B. 已知 $AC=AB=BD=6$，求线段 CD 的长.



解▶ $\because AC\perp AB, BD\perp AB, \therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=0, \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=0.$

$\because$ 二面角 $\alpha-AB-\beta$ 的平面角为 120°，

$\therefore \langle\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\rangle=180°-120°=60°.$

$\therefore \overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2=\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BD}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times6^2+2\times6^2\times\cos 60°=144,$

$\therefore CD=12.$